เฉลยข้อสอบ PRE-ม.ต้น'67

ชุดวิชา T432801 : คณิตศาสตร์ (มหิดลฯ/จุฬาภรณ์ฯ)

ข้อ 1-20 (ข้อละ 1 คะแนน)

1. 4)	**2.** 3)	**3.** 4)	**4.** 2)	**5.** 1)	**6.** 2)	**7.** 1)	**8.** 3)	**9.** 3)	**10.** 1)
11. 2)	**12.** 2)	**13.** 4)	**14.** 3)	**15.** 3)	**16.** 1)	**17.** 2)	**18.** 3)	**19.** 4)	**20.** 3)

ข้อ 21-60 (ข้อละ 2 คะแนน)

21. 1)	**22.** 1)	**23.** 3)	**24.** 3)	**25.** 2)	**26.** 2)	**27.** 4)	**28.** 3)	**29.** 2)	**30.** 2)
31. 1)	**32.** 1)	**33.** 4)	**34.** 3)	**35.** 4)	**36.** 2)	**37.** 3)	**38.** 1)	**39.** 4)	**40.** 4)
41. 1)	**42.** 1)	**43.** 2)	**44.** 4)	**45.** 1)	**46.** 3)	**47.** 1)	**48.** 3)	**49.** 2)	**50.** 4)
51. 3)	**52.** 3)	**53.** 2)	**54.** 4)	**55.** 4)	**56.** 2)	**57.** 2)	**58.** 3)	**59.** 2)	**60.** 3)

เฉลยข้อสอบ PRE–ม.ต้น'67

ชุดวิชา T432801 : คณิตศาสตร์ (มหิดลฯ/จุฬาภรณ์ฯ)

ข้อ 1-20 (ข้อละ 1 คะแนน)

1. เฉลย 4) 9

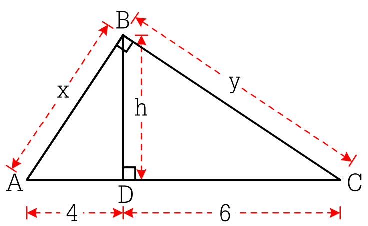
เมื่อ $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - k$ หารด้วย $x - 2$ ได้ลงตัว
จะได้ เศษเหลือ คือ f(2) มีค่าเท่ากับ 0 (ทฤษฎีบทเศษเหลือ)

$$2^4 - 2(2^3) + 2 - k = 0$$
$$k = 2$$
ดังนั้น
$$2k + 5 = 9$$

2. เฉลย 3) 3

จาก m : n = 4 : 5 สมมุติให้ m = 4k และ n = 5k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก
ดังนั้น
$$mn = 180$$
$$(4k)(5k) = 180$$
$$20k^2 = 180$$
$$k = 3 \text{ หรือ } k = -3$$
แต่ m = 4k, n = 5k และทั้งคู่เป็นจำนวนเต็มบวก $\therefore$ m = 12 และ n = 15
จึงได้ว่า ห.ร.ม. ของ m กับ n คือ 3

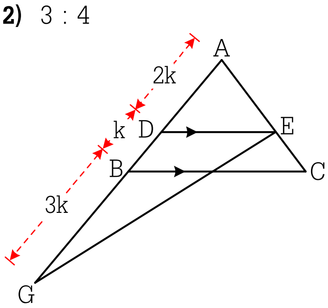
3. เฉลย 4) $10\sqrt{6}$ ตารางหน่วย



จากรูป $x^2 - 16 = h^2$ ...(1)
$y^2 - 36 = h^2$ ...(2)
และ $x^2 + y^2 = 100$ ...(3)
(1) = (2) ; $x^2 - 16 = y^2 - 36$
$x^2 - y^2 = -20$ ...(4)
(3) + (4) ; $2x^2 = 80$
$x^2 = 40$
จะได้ $y^2 = 60$

ดังนั้น
$$\text{พื้นที่ } \Delta\, ABC = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{40\cdot 60} = 10\sqrt{6} \text{ ตารางหน่วย}$$

4. เฉลย 2) 3 : 4



จาก $\overline{AD} : \overline{AB} = 2 : 3$ และ $\overline{GB} : \overline{GD} = 3 : 4$
ถ้าให้ $\overline{BD}$ = k หน่วย จะได้ $\overline{AD}$ = 2k หน่วย
และ $\overline{GB}$ = 3k หน่วย
ดังนั้น $\overline{AB} : \overline{GD}$ = 3k : 4k = 3 : 4

5. เฉลย 1) 4

$$
\begin{aligned}
N &= 11\tfrac{1}{2} + 12\tfrac{2}{3} + 13\tfrac{5}{6} \\
&= \left(12 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(13 - \tfrac{1}{3}\right) + \left(14 - \tfrac{1}{6}\right) \\
&= (12 + 13 + 14) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\right) \\
&= 39 - 1 \\
&= 38
\end{aligned}
$$

ซึ่ง 38 มีตัวประกอบที่เป็นบวก คือ 1, 2, 19, 38 รวมทั้งหมด 4 ตัว

6. เฉลย 2) ถูกเฉพาะข้อ ข.

$$x = \sqrt{5555} - \sqrt{5554} = \frac{1}{\sqrt{5555} + \sqrt{5554}}$$

$$y = \sqrt{5554} - \sqrt{5553} = \frac{1}{\sqrt{5554} + \sqrt{5553}}$$

เนื่องจาก $\sqrt{5555} + \sqrt{5554} > \sqrt{5554} + \sqrt{5553}$

จะได้ $\dfrac{1}{\sqrt{5555} + \sqrt{5554}} < \dfrac{1}{\sqrt{5554} + \sqrt{5553}}$

$$x < y$$

ดังนั้น ข้อ ก. **ผิด**

เนื่องจาก $0 < x, y < 1$ (เห็นได้ชัด) และ $y - x > 0$ (จากข้อ ก.)

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
x^{y-x} &< x^0 \\
x^{y-x} &< 1 \\
\frac{x^y}{x^x} &< 1 \\
x^y &< x^x
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ข้อ ข. **ถูก**

7. เฉลย 1) 1 : 4

ให้ผสมกาแฟชนิดแรก x กิโลกรัม

ชนิดที่สอง y กิโลกรัม

ทุน = $280x + 180y$ บาท, ขาย = $240(x + y)$ บาท ได้กำไร 20%

สมการคือ

$$
\begin{aligned}
240(x + y) &= \frac{{}^{6}\cancel{120}}{{}_{5}\cancel{100}}(280x + 180y) \\
200x + 200y &= 280x + 180y \\
80x &= 20y \\
\frac{x}{y} &= \frac{20}{80} = \frac{1}{4} \\
x : y &= 1 : 4
\end{aligned}
$$

8. เฉลย 3) 1.5 หน่วย

ให้ r เป็นรัศมีของทรงกลม จะได้ว่า $A = 4\pi r^2$ และ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{V} &= \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\
2 &= \frac{3}{r} \\
\therefore\ r &= 1.5 \text{ หน่วย}
\end{aligned}
$$

9. เฉลย 3) $2\sqrt{2}$

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{40}} - \sqrt{7-\sqrt{40}}\right)^2$$
$$= (7 + \sqrt{40}) - 2\left(\sqrt{(7+\sqrt{40})(7-\sqrt{40})}\right) + (7 - \sqrt{40})$$
$$= 14 - 2\sqrt{49-40}$$
$$= 14 - 2\sqrt{9} = 8$$

ดังนั้น $\sqrt{7+\sqrt{40}} - \sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

10. เฉลย 1) $\frac{1}{6}$

โยนเหรียญ 2 เหรียญ และลูกเต๋า 1 ลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง

$$n(S) = 2 \times 2 \times 6$$

เหตุการณ์ที่เหรียญทั้งสองหงายหน้าเดียวกันและลูกเต๋าหงายแต้มที่**มากกว่า** 4 คือ (H, H, 5), (H, H, 6), (T, T, 5) และ (T, T, 6)

$$n(E) = 4$$
$$P(E) = \frac{4}{2 \times 2 \times 6} = \frac{1}{6}$$

11. เฉลย 2) 2

$$\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)\left(\sqrt[4]{4}\right) = \left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\right)(2^2)^{1/4}$$
$$= \left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}\right)(2^{1/2})$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$
$$= 2$$

12. เฉลย 2) 2

จาก $\frac{n^3 + 36}{n+3} = n^2 - 3n + 9 + \frac{9}{n+3}$

เนื่องจาก $\frac{n^3+36}{n+3}$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $n + 3$ เป็นตัวประกอบของ 9

$$\therefore \; n + 3 = -9, -3, -1, 1, 3, 9$$
$$n = -12, -6, -4, -2, 0, 6$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนนับ ดังนั้น $n = 6$ ซึ่งมีตัวประกอบเฉพาะ 2 จำนวน คือ 2 และ 3

13. เฉลย 4) 14.55%

ติดราคาตอนแรก $\frac{110}{100} \times 85 = 93.50$ บาท

ทุนใหม่ (เมื่อข้าวราคาเพิ่มขึ้น 20%) = $\frac{120}{100} \times 85$ บาท

ต้องการกำไร 5% ต้องติดราคา $= \frac{105}{100} \times \frac{120}{100} \times 85 = 107.10$ บาท

ให้ติดราคาเพิ่มขึ้นจากเดิม x%

$$\therefore \; \frac{x}{100} = \frac{107.10 - 93.50}{93.5}$$
$$x \approx 14.55\%$$

14. เฉลย 3) 9

ให้ $a = 1.\dot{2}36\dot{7}$ ...(1)

ดังนั้น $10000a = 12367.\dot{2}36\dot{7}$ ...(2)

(2) – (1) ; $9999a = 12366$

$$\therefore\ a = \frac{12366}{9999} = \frac{4122}{3333}$$

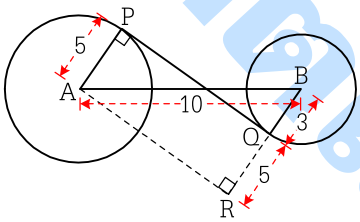
นั่นคือ x = 4122 ซึ่งผลบวกของเลขโดดทุกหลักใน x เป็น 4 + 1 + 2 + 2 = 9

15. เฉลย 3) $\sqrt[3]{4}$

เนื่องจาก $ax^2 - 4x + a^2 = 0$ มีเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น
$$(-4)^2 - 4a(a^2) = 0$$
$$16 - 4a^3 = 0$$
$$a^3 = 4$$
$$a = \sqrt[3]{4}$$

16. เฉลย 1) 6 หน่วย



สร้างรูปเพิ่มเติมดังรูป

พิจารณา Δ มุมฉาก ABR

AR : 8 : 10 = 3 : 4 : 5 (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

$\therefore$ AR = 6 หน่วย

$\therefore$ PQ = AR = 6 หน่วย

17. เฉลย 2) $y = -\frac{1}{2}x$

จาก $4y = x^2 - 4x$

จะได้ $4y + 4 = x^2 - 4x + 4$

$$4(y + 1) = (x - 2)^2$$
$$y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 1$$

ดังนั้น จุดยอดของพาราโบลา คือ (2, –1)

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด (0, 0) และจุดยอด (2, –1) คือ $y = -\frac{1}{2}x$

18. เฉลย 3) 5

จาก $\dfrac{4x + A}{x^2 - 2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{B}{x - 2}$

$$4x + A = (x - 2) + Bx$$
$$4x + A = (B + 1)x - 2$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ A = –2 และ B = 3

ดังนั้น $B - A = 3 - (-2) = 5$

19. เฉลย 4) $\sqrt{3}$

เนื่องจาก $\quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad$ ...(1)

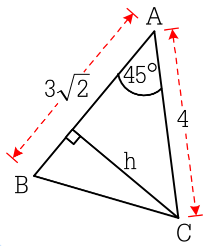
และจากโจทย์ $\quad \sin^2 A - \cos^2 A = \frac{1}{2} \quad$ ...(2)

(1) + (2) ; $\quad 2\sin^2 A = \frac{3}{2}$

$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ $\hat{A} = 60^\circ$

$\therefore \tan A = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

20. เฉลย 3) 6 ตารางหน่วย



ให้เส้นความสูงจากจุด C ยาว h หน่วย

จะได้ว่า $\quad h = 4 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$ หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม คือ $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 6$ ตารางหน่วย

ข้อ 21-60 (ข้อละ 2 คะแนน)

21. เฉลย 1) 6565

ให้ $\quad x = \sqrt{6565 + 6564\sqrt{6565 + 6564\sqrt{6565 + \cdots}}}$

จะได้ $\quad x = \sqrt{6565 + 6564x}$

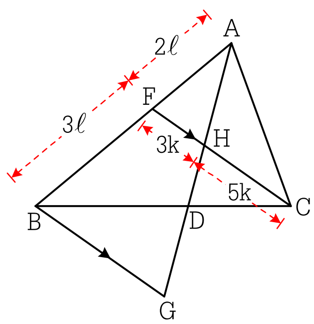
$$x^2 = 6565 + 6564x$$

$$x^2 - 6564x - 6565 = 0$$

$$(x - 6565)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 6565 \quad (\because x > 0)$$

22. เฉลย 1) 3 : 2



สร้างรูปเพิ่มเติมและกำหนดความยาว ดังรูป

$\Delta AFH \sim \Delta ABG$

$$\frac{BG}{3k} = \frac{AB}{AF} = \frac{5\ell}{2\ell}$$

$$BG = \frac{5}{2}(3k) = \frac{15}{2}k$$

$\Delta BDG \sim \Delta CDH$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BG}{CH} = \frac{\frac{15}{2}k}{5k} = \frac{3}{2}$$

23. เฉลย 3) 9

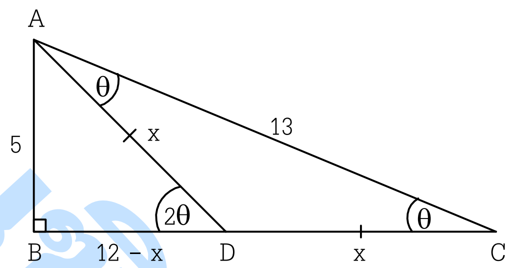
$$3^{27^x} = 27^{3^x}$$
$$3^{(3^3)^x} = (3^3)^{3^x}$$
$$3^{3^{3x}} = 3^{3^{x+1}}$$

จะได้ $3x = x + 1$

$$\therefore\ x = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $81^x = 81^{1/2} = \sqrt{81} = 9$

24. เฉลย 3) $\frac{119}{169}$



จาก AD = DC ดังนั้น $D\hat{A}C = A\hat{C}B = \theta$ นั่นคือ $A\hat{D}B = 2\theta$

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

ให้ DC = x จะได้ AD = x และ BD = 12 – x

พิจารณา สามเหลี่ยม ABD โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$x^2 - (12 - x)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 144 + 24x - x^2 = 25$$
$$24x = 169$$
$$x = \frac{169}{24}$$

นั่นคือ $\cos 2\theta = \frac{BD}{AD}$

$$= \frac{12 - \frac{169}{24}}{\frac{169}{24}}$$

$$= \frac{119}{169}$$

25. เฉลย 2) 90

จากโจทย์ จะได้ $DE \times 3 = 36$

$\therefore\ DE = 12$ นิ้ว

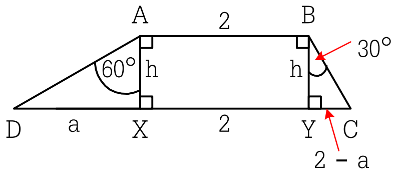
$\Delta CDE \sim \Delta AGD$; $\frac{CD}{3} = \frac{12}{4}$ จะได้ CD = 9 นิ้ว

พื้นที่ $\square$ABCD = พื้นที่ $\square$ABED + พื้นที่ ΔCDE

$$= 36 + \frac{1}{2} \times 9 \times 12$$

= 90 ตารางนิ้ว

26. เฉลย 2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย



ให้ $\overline{AX} \perp \overline{DC}$ และ $\overline{BY} \perp \overline{DC}$

สมมุติ DX = a หน่วย จะได้ YC = 2 – a หน่วย

ใน Δ ADX ; $\tan 60^\circ = \frac{a}{h}$

$a = h\sqrt{3}$ ...(1)

ใน Δ BYC ; $\tan 30^\circ = \frac{2-a}{h}$

$a = 2 - \frac{h}{\sqrt{3}}$ ...(2)

(1) = (2) ; $h\sqrt{3} = 2 - \frac{h}{\sqrt{3}}$

$3h = 2\sqrt{3} - h$

$4h = 2\sqrt{3}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น พื้นที่ $\boxed{\text{ค}}$ ABCD $= \frac{1}{2} \times h \times (AB + DC)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (2 + 4) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

27. เฉลย 4) ถังใบที่หนึ่ง 8 ส่วน ถังใบที่สอง 5 ส่วน

สมมติให้ตักสารจากถังใบที่หนึ่ง x ส่วน และจากถังใบที่สอง y ส่วน

จะได้สาร A ปริมาณ $\frac{1}{6}x + \frac{3}{5}y$ ส่วน และสาร B ปริมาณ $\frac{5}{6}x + \frac{2}{5}y$ ส่วน

ดังนั้น
$$\frac{\frac{1}{6}x + \frac{3}{5}y}{\frac{5}{6}x + \frac{2}{5}y} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{6}x + \frac{6}{5}y = \frac{5}{6}x + \frac{2}{5}y$$
$$\frac{4}{5}y = \frac{3}{6}x$$
$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{3} = \frac{8}{5}$$

$\therefore$ จะต้องตักสารจากถังใบที่หนึ่ง 8 ส่วน และถังใบที่สอง 5 ส่วน

28. เฉลย 3) 147

จากความจริงที่ว่า ถ้าสามเหลี่ยม 2 รูป มีมุมเท่ากันหนึ่งมุม จะได้อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับอัตราส่วนของผลคูณของด้านประกอบของมุมที่เท่ากัน

ดังนั้น จะได้ว่า $\frac{\text{พื้นที่ } \Delta AMP}{\text{พื้นที่ } \Delta ABC} = \frac{3k \times k}{4k \times 4k} = \frac{3}{16}$

$\therefore$ พื้นที่ ΔAMP $= \frac{3}{16}$ พื้นที่ ΔABC = พื้นที่ ΔPCN = พื้นที่ ΔMBN

พื้นที่ ΔPMN = พื้นที่ ΔABC – $3\left(\frac{3}{16}\right)$ พื้นที่ ΔABC

$= \left(1 - \frac{9}{16}\right)$ พื้นที่ ΔABC $= \frac{7}{16}$ พื้นที่ ΔABC

ดังนั้น พื้นที่ ΔQRS $= \frac{7}{16}$ พื้นที่ ΔPMN $= \frac{7}{16}\left(\frac{7}{16}\text{ พื้นที่ } \Delta ABC\right)$

$= \frac{7}{16} \times \frac{7}{16} \times 768 = 147$ ตารางนิ้ว

29. เฉลย 2) 6

จากสมการ $y = x^2 - 4x + c$ ...(1)

ได้ว่า $a = 1, b = -4$ เมื่อเทียบกับสมการทั่วไป $y = ax^2 + bx + c$

จุดยอดอยู่ที่ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$

เมื่อจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $y = x$ $\therefore$ $y = 2$

แทนค่า x และ y ใน (1) ; $2 = 2^2 - 4(2) + c$

$c = 2 + 4 = 6$

30. เฉลย 2) $x^2 + (2b - a^2)x + b^2 = 0$

โจทย์กำหนดว่าสมการ $x^2 + ax + b = 0$ มีคำตอบคือ p และ q

จะได้ ผลบวกของคำตอบ คือ $p + q = -a$ ...(1)

และ ผลคูณของคำตอบ คือ $pq = b$ ...(2)

$(1)^2$; $(p + q)^2 = (-a)^2$

$p^2 + 2pq + q^2 = a^2$

แทน $pq = b$ จะได้ $p^2 + q^2 = a^2 - 2b$ ...(3)

$(2)^2$; $p^2q^2 = b^2$ ...(4)

จาก (3) และ (4) ; สมการที่มี p^2 และ q^2 เป็นคำตอบ คือ $x^2 + (2b - a^2)x + b^2 = 0$

31. เฉลย 1) $2^{97} - 2$

$$
\begin{aligned}
&14(1 + 2^3)(1 + 2^6)(1 + 2^{12})(1 + 2^{24})(1 + 2^{48}) \\
=\ &2(7)(1 + 2^3)(1 + 2^6)(1 + 2^{12})(1 + 2^{24})(1 + 2^{48}) \\
=\ &2(2^3 - 1)(2^3 + 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)(2^{48} + 1) \\
=\ &2(2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)(2^{48} + 1) \\
=\ &2(2^{12} - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)(2^{48} + 1) \\
=\ &2(2^{24} - 1)(2^{24} + 1)(2^{48} + 1) \\
=\ &2(2^{48} - 1)(2^{48} + 1) \\
=\ &2(2^{96} - 1) = 2^{97} - 2
\end{aligned}
$$

32. เฉลย 1) $|a| > 3$

$$
\begin{aligned}
(x^2 + ax + 1)^2 &= x^2 \\
(x^2 + ax + 1)^2 - x^2 &= 0 \\
(x^2 + ax + 1 - x)(x^2 + ax + 1 + x) &= 0 \\
(x^2 + (a - 1)x + 1)(x^2 + (a + 1)x + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$ หรือ $x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$

$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง 2 คำตอบ เมื่อ $(a - 1)^2 - 4 > 0$ $\therefore$ $a > 3$ หรือ $a < -1$

$x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง 2 คำตอบ เมื่อ $(a + 1)^2 - 4 > 0$ $\therefore$ $a > 1$ หรือ $a < -3$

$\therefore$ $a > 3$ หรือ $a < -3$

นั่นคือ $|a| > 3$

33. เฉลย 4) $\frac{1}{169}$

จาก $12x + 5y = 1$

ดังนั้น $y = \frac{1-12x}{5}$

จาก $x^2 + y^2 = a$

$$x^2 + \left(\frac{1-12x}{5}\right)^2 = a$$

$$x^2 + \frac{1-24x+144x^2}{25} = a$$

$$25x^2 + 1 - 24x + 144x^2 = 25a$$

$$169x^2 - 24x + 1 = 25a$$

$$x^2 - \frac{24x}{169} + \frac{1}{169} = \frac{25a}{169}$$

$$x^2 - \frac{24x}{169} + \left(\frac{12}{169}\right)^2 = \frac{25a}{169} - \frac{1}{169} + \left(\frac{12}{169}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{12}{169}\right)^2 = \left[\frac{25a}{169} - \frac{25}{(169)^2}\right] \geq 0$$

ดังนั้น a ที่**น้อยที่สุด**จะสอดคล้องกับ $\frac{25a}{169} - \frac{25}{(169)^2} = 0$

$$a = \frac{1}{169}$$

34. เฉลย 3) $\sqrt{2}$

จากโจทย์ $x^2 - y^2 = 0$ หรือ $x^2 = y^2$ ...(1)

$(x-a)^2 + y^2 = 1$ หรือ $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 1 = 0$ ...(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 1 = 0$

$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ ...(3)

สังเกตว่า เมื่อ x ในสมการ (3) มีคำตอบเดียว จะทำให้ y ในระบบสมการนี้มี 2 คำตอบ

เราทราบว่า สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จะมีคำตอบเดียวเมื่อ $b^2 - 4ac = 0$

$\therefore$ x ในสมการ (3) จะมีคำตอบเดียว เมื่อ $(-2a)^2 - 4(2)(a^2-1) = 0$

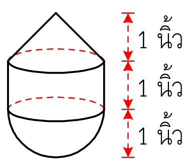
$$4a^2 - 8a^2 + 8 = 0$$

$$4a^2 = 8$$

$$a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

35. เฉลย 4) 2π

$\therefore$ ปริมาตรทรงตัน = ปริมาตรกรวย + ปริมาตรทรงกระบอก + ปริมาตรครึ่งทรงกลม



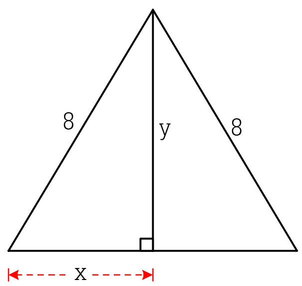
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \pi r^2\left(\frac{1}{3}h_{\text{กรวย}} + h_{\text{ทรงกระบอก}} + \frac{2}{3}r\right)$$

$$= \pi \cdot 1^2\left(\frac{1}{3}\cdot 1 + 1 + \frac{2}{3}\cdot 1\right)$$

$= 2\pi$ ลูกบาศก์นิ้ว

36. เฉลย 2) 32 ตารางหน่วย



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $x^2 + y^2 = 64$

$\therefore\ y = \sqrt{64 - x^2}$

เนื่องจากพื้นที่สามเหลี่ยมเท่ากับ $\frac{1}{2}(2x)y = xy$

$= x\sqrt{64 - x^2}$

พิจารณา**ค่าสูงสุด**ของ $(x\sqrt{64 - x^2})^2 = x^2(64 - x^2)$

$= 64x^2 - x^4$

$= 1{,}024 - (x^4 - 64x^2 + 1{,}024)$

$= 1{,}024 - (x^2 - 32)^2$

ดังนั้น $(x\sqrt{64 - x^2})^2$ มี**ค่าสูงสุด**เป็น 1,024

$\therefore$ **ค่าสูงสุด**ของ $x\sqrt{64 - x^2}$ คือ $\sqrt{1{,}024} = 32$ ตารางหน่วย

37. เฉลย 3) 101

ให้ y = กำไร = รายได้ – ต้นทุน $= (1{,}000 - 5x)x - (100 - 10x)$

$y = -5x^2 + 1{,}010x - 100$

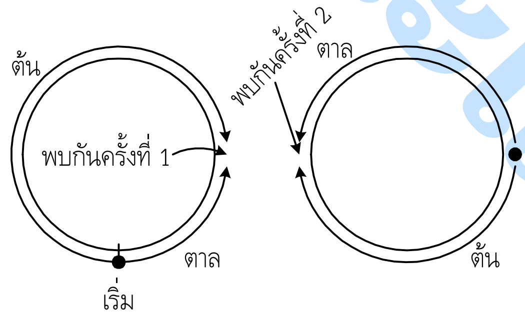
เราทราบว่า พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$ จะมี**ค่าสูงสุด** เมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

$\therefore$ กำไร (y) จะมีค่า**มากที่สุด**เมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

$= \frac{-1{,}010}{2(-5)}$

$= 101$

38. เฉลย 1) $4\frac{4}{9}$ นาที



จากรูป สังเกตว่าทั้งคู่จะพบกันครั้งที่สอง เมื่อทั้งคู่วิ่งได้ระยะทางรวม 2 รอบสนาม
สมมุติให้ทั้งคู่วิ่งได้ระยะทางรวม 2 รอบสนามใน x นาที
จะได้ว่า นายต้นวิ่งได้ $\frac{x}{4}$ รอบ และนายตาลวิ่งได้ $\frac{x}{5}$ รอบ

ดังนั้น $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 2$

จะได้ $x = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ นาที

39. เฉลย 4) $\frac{120}{7}$ นาที

สมมติให้นาย A, นาย B และนาย C ทำงานได้นาทีละ a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

และให้นาย C ทำงานคนเดียวงานเสร็จใน t นาที

จะได้ปริมาณงาน 1 ชิ้น คือ 60a = 40b = ct

นั่นคือ $a = \frac{ct}{60}$, $b = \frac{ct}{40}$

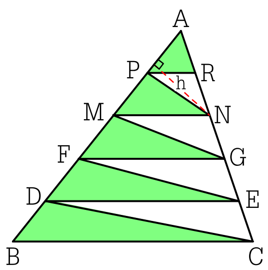
จากทั้งสามคนช่วยกันงานจะเสร็จใน 10 นาที

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
10(a+b+c) &= ct \\
10\left(\frac{ct}{60}+\frac{ct}{40}+c\right) &= ct \\
10\left(\frac{t}{60}+\frac{t}{40}+1\right) &= t \\
\frac{1}{6}t+\frac{1}{4}t+10 &= t \\
10 &= \frac{7}{12}t \\
\therefore\ t &= \frac{120}{7} \text{ นาที}
\end{aligned}$$

40. เฉลย 4) 3 : 5

ทฤษฎีบท : อัตราส่วนของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันเท่ากับกำลังสองของอัตราส่วนของด้านคู่ที่สมนัยกัน



จากโจทย์ AP = PM = MF = FD = DB

AR = RN = NG = GE = EC

Δ APR ~ Δ ABC ($\hat{A}$ มุมร่วม, $A\hat{P}R = A\hat{B}C$ และ $A\hat{R}P = A\hat{C}B$)

$$\frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ APR}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{(5)^2} \quad \text{...(1)}$$

Δ AMN ~ Δ ABC ($\hat{A}$ มุมร่วม, $A\hat{M}N = A\hat{B}C$ และ $A\hat{N}M = A\hat{C}B$)

$$\begin{aligned}
\frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ PMN}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} &= \frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ PMN}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ AMN}} \times \frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ AMN}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} \\
&= \frac{\cancel{\frac{1}{2}\times h}\times \boxed{PM}}{\cancel{\frac{1}{2}\times h}\times \boxed{AM}} \times \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{(5)^2} \quad \text{...(2)}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ MFG}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} = \frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ MFG}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ AFG}} \times \frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ AFG}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{(5)^2} \quad \text{...(3)}$$

$$\frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ FDE}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} = \frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ FDE}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ADE}} \times \frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ADE}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{(5)^2} \quad \text{...(4)}$$

$$\frac{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ DBC}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} = \frac{1}{5} \quad (\because \text{ ฐาน AB = 5DB และสูงเท่ากัน}) \quad = \frac{5}{(5)^2} \quad \text{...(5)}$$

(1) + (2) + (3) + (4) + (5) ;

$$\frac{\text{พื้นที่แรเงา}}{\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ABC}} = \frac{1+2+3+4+5}{(5)^2} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

41. เฉลย 1) 1.5

ให้ $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ ...(1)

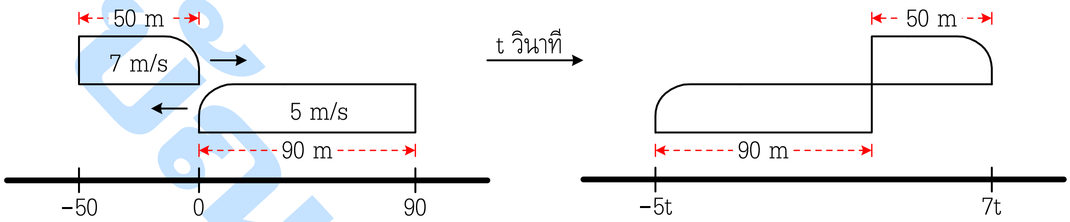
$\therefore \frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \cdots$ ...(2)

(1) – (2) ; $\frac{3}{2}S = 1$

$\therefore S = \frac{3}{2} = 1.5$

42. เฉลย 1) ในช่วง 11 วินาที ถึง 12 วินาที

สมมติให้ใช้เวลาทั้งหมด t วินาที



รถไฟขบวนแรกเคลื่อนที่ได้ 7t เมตร

รถไฟขบวนที่สองเคลื่อนที่ได้ 5t เมตร

จากแผนภาพ จะได้ $7t - (-5t) = 90 + 50$

$12t = 140$

$t = \frac{140}{12} = 11\frac{2}{3}$ วินาที

นั่นคือ ในช่วง 11 วินาที ถึง 12 วินาที

43. เฉลย 2) ก. ถูก และ ข. ผิด

ให้ซื้อฝรั่งมา x กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 30 บาท เป็นเงิน 30x บาท

$\therefore$ ซื้อส้มเป็นเงิน 6,000 – 30x บาท ได้ส้ม $\frac{6{,}000 - 30x}{50}$ กิโลกรัม

จากโจทย์ ได้ฝรั่งและส้มรวมกัน**มากกว่า** 150 กิโลกรัม แต่**ไม่เกิน** 160 กิโลกรัม

จะได้

$$150 < x + \frac{6{,}000 - 30x}{50} \le 160$$

$$7{,}500 < 50x + 6{,}000 - 30x \le 8{,}000$$

$$7{,}500 - 6{,}000 < 50x - 30x \le 8{,}000 - 6{,}000$$

$$1{,}500 < 20x \le 2{,}000$$

$$75 < x \le 100$$

นั่นคือ ซื้อฝรั่งได้**มากที่สุด** 100 กิโลกรัม.. ก. **ถูก**

ซื้อส้มได้**มากที่สุด** [6,000 – 75(30)] ÷ 50 = 75 กิโลกรัม........................ ข. **ผิด**

(จะซื้อส้มให้ได้**มากที่สุด** ก็ต้องซื้อฝรั่งให้**น้อยที่สุด**)

44. เฉลย 4) $\sqrt{2.24}$

$\because$ ข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ และ $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_{10} + b$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ 100, 101, 101, 102, 102, 102, 103, 104, 104, 105

เท่ากับ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5

พิจารณา $\frac{\Sigma x_i^2}{n} = \frac{0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2}{10} = 8$

และ $\bar{x} = \frac{0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5}{10} = 2.4$

$$\therefore S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{8 - (2.4)^2} = \sqrt{2.24}$$

45. เฉลย 1) 11.5

จาก $\dfrac{5ab}{a+b} = \dfrac{7bc}{b+c} = \dfrac{11ca}{c+a} = 1$

จะได้ $\dfrac{a+b}{5ab} = \dfrac{b+c}{7bc} = \dfrac{c+a}{11ca} = 1$

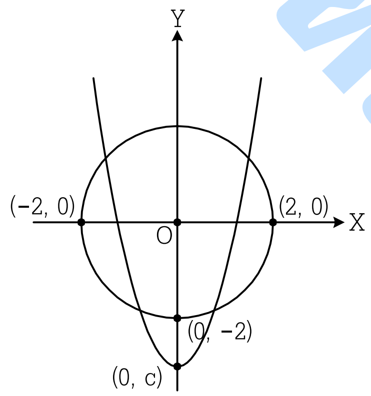
ดังนั้น $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{1}{11}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right) = 1$

ดังนั้น
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 5 \quad ...(1)$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 7 \quad ...(2)$$
$$\frac{1}{c}+\frac{1}{a} = 11 \quad ...(3)$$

(1) + (2) + (3) ; $2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) = 23$

นั่นคือ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 11.5$

46. เฉลย 3) $\dfrac{-17}{4} < c < -2$



$y = x^2 + c$ เป็นกราฟพาราโบลาที่มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร จุดตัดแกน Y เป็น (0, c)

$x^2 + y^2 = 4$ เป็นกราฟวงกลมมีจุดศูนย์กลาง (0, 0) รัศมี 2 หน่วย

จากรูปจะเห็นได้ชัดว่า $c < -2$ แต่ต้องพิจารณาค่า c ที่ทำให้กราฟพาราโบลาตัดกับกราฟวงกลมด้วย

$$y = x^2 + c \quad ...(1)$$
$$x^2 + y^2 = 4 \quad ...(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $(y - c) + y^2 = 4$

$$y^2 + y - (c + 4) = 0$$

ค่า y ต้องมี 2 ค่า ดังนั้น $1^2 - 4(1)[-(c+4)] > 0$

$$c > \frac{-17}{4}$$

นั่นคือ $\dfrac{-17}{4} < c < -2$

47. เฉลย 1) 76

ในรูป i เหลี่ยม มีเส้นทแยงมุม $\dfrac{i(i-3)}{2}$ เส้น

จาก
$$\bar{x} = \frac{x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{22}}{20}$$
$$= \frac{\sum_{i=3}^{22} \frac{i(i-3)}{2}}{20}$$
$$= \frac{1}{40}\sum_{i=3}^{22}(i^2 - 3i)$$
$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=3}^{22} i^2 - 3\sum_{i=3}^{22} i\right) \quad ...(*)$$

พิจารณา $\sum_{i=3}^{22} i^2 = \left(\sum_{i=1}^{22} i^2\right) - 1^2 - 2^2 = \dfrac{(22)(23)(45)}{6} - 5 = 3{,}790$

และ $\sum_{i=3}^{22} i = \left(\sum_{i=3}^{22} i\right) - 1 - 2 = \dfrac{(22)(23)}{2} - 3 = 250$

นำไปแทนใน (*) จะได้ $\bar{x} = \dfrac{1}{40}(3{,}790 - 3(250)) = 76$

48. เฉลย 3) 3

ให้ $$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots \quad ...(1)$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \cdots \quad ...(2)$$

(1) – (2) ; $$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$S = 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) \quad ...(*)$$

พิจารณา $$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \quad ...(3)$$

$$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \quad ...(4)$$

(3) – (4) ; $$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}$$

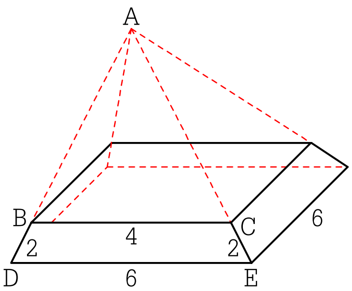
$$\therefore T = 1$$

แทนค่า T ใน (*) จะได้ $$S = 1 + 1 + 1 = 3$$

49. เฉลย 2) $\frac{76\sqrt{2}}{3}$

ต่อปลายด้านบนขึ้นไปพบกันที่จุด A จะได้รูปทรงพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูป

ขนาดบรรจุ**มากที่สุด** = ปริมาตรพีระมิดฐานยาว 6 หน่วย – ปริมาตรพีระมิดฐานยาว 4 หน่วย



เนื่องจาก BC//DE ทำให้ Δ ABC $\sim$ Δ ADE

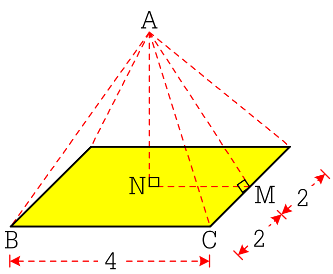
($\hat{A}$ เป็นมุมร่วม, $A\hat{B}C = A\hat{D}E$ และ $A\hat{C}B = A\hat{E}D$)

จะได้ $$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AC}{AC+2} = \frac{4}{6}$$

คูณไขว้ ; $$6AC = 4AC + 8$$

$$AC = 8 \div 2 = 4 \text{ หน่วย}$$



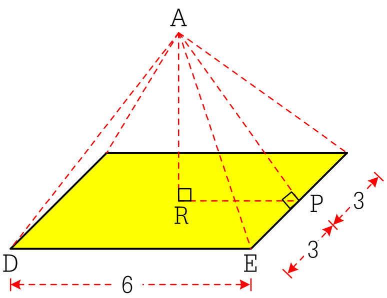
หาปริมาตรพีระมิดฐานยาว 4 หน่วย (V_1)

$$AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} \quad \text{(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)}$$

$$= \sqrt{(AC^2 - CM^2) - MN^2} \quad \text{(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)}$$

$$= \sqrt{(4^2 - 2^2) - 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$



หาปริมาตรพีระมิดฐานยาว 6 หน่วย (V_2)

$$AR = \sqrt{AP^2 - PR^2} \quad \text{(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)}$$

$$= \sqrt{(AE^2 - EP^2) - PR^2} \quad \text{(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)}$$

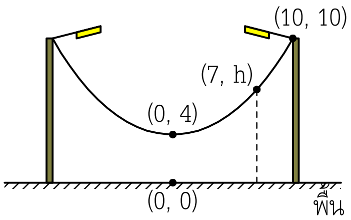
$$= \sqrt{(4+2)^2 - 3^2 - 3^2} = 3\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times 3\sqrt{2} = \frac{108\sqrt{2}}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

ดังนั้น ขนาดบรรจุ**มากที่สุด** $= V_2 - V_1 = \frac{108\sqrt{2}}{3} - \frac{32\sqrt{2}}{3} = \frac{76\sqrt{2}}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

บัณฑิตแนะแนว

50. เฉลย 4) 6.94 เมตร



ให้จุดกำเนิดอยู่ที่พื้นซึ่งอยู่กึ่งกลางเสาไฟทั้งสองต้น ทำให้ใส่พิกัดให้ตำแหน่งต่างๆ ได้ดังรูป

จะได้ว่า พาราโบลามีจุดยอดที่จุด (0, 4)

พาราโบลาอยู่ในรูป $y = ax^2 + 4$

เนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด (10, 10) จะได้

$$10 = a(10)^2 + 4$$
$$a = 0.06$$

นั่นคือ พาราโบลามีสมการเป็น $y = 0.06x^2 + 4$

แทนค่า $x = 7,\ y = h$ จะได้ $h = (0.06)(7^2) + 4 = 6.94$ เมตร

51. เฉลย 3) 7

$$x^2 - 6x - 14 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(6x + \frac{6}{x}\right) - 14 = 0$$
$$\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{x} - 8\right)\left(x + \frac{1}{x} + 2\right) = 0$$

$$x + \frac{1}{x} - 8 = 0 \qquad\qquad x + \frac{1}{x} + 2 = 0$$
$$x^2 - 8x + 1 = 0 \qquad\qquad x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$\therefore\ x = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} \qquad\qquad (x+1)^2 = 0$$
$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} \qquad\qquad x = -1$$

ดังนั้น ผลบวกของคำตอบทั้งหมด คือ $\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} + \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} + (-1) = 7$

52. เฉลย 3) $57\frac{3}{20}$

จากโจทย์ $a\frac{b}{c} + b\frac{a}{c} + c\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} + 12$

$$(a + b + c) + \left(\cancel{\frac{b}{c} + \frac{a}{c}} + \frac{a}{b}\right) = \left(\cancel{\frac{a}{b} + \frac{b}{c}} + \frac{a}{c}\right) + 12$$
$$a + b + c = 12$$

จากโจทย์ $b + c = 3a$ จะได้ $4a = 12$ หรือ $a = 3$

และได้ $b + c = 3 \times 3 = 9$

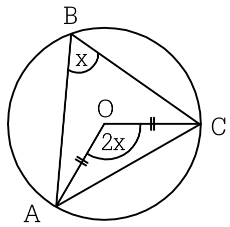
จากโจทย์ $a < b < c$ ดังนั้น $b = 4$ และ $c = 5$

จากโจทย์ $\frac{m}{20} + 12 = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} + 12$

$$\frac{m}{20} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{43}{20}$$
$$\therefore\ m = 43 \text{ และ } n = \frac{43}{20} + 12 = 14\frac{3}{20}$$

ดังนั้น $m + n = 43 + 14\frac{3}{20} = 57\frac{3}{20}$

53. เฉลย 2) 30 องศา



ให้มุม ABC มีขนาด x องศา เนื่องจากมุม AOC เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง

$\therefore$ มุม AOC มีขนาด 2x องศา

จะได้ว่ามุมกลับ AOC มีขนาด 360 – 2x องศา

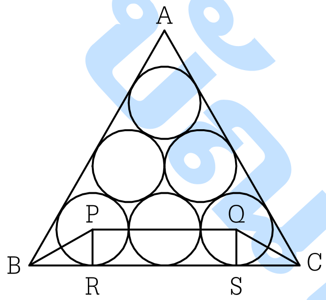
จากโจทย์ จะได้ $(360 - 2x) + x = 300$

$\therefore x = 60$

$\because$ Δ AOC เป็นรูป Δ หน้าจั่วที่มุมยอด AOC มีขนาด 2x = 120 องศา

$\therefore$ มุม OAC มีขนาด (180 – 120) ÷ 2 = 30 องศา

54. เฉลย 4) $12 + 6\sqrt{3}$ หน่วย



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

จาก $\quad P\hat{B}R = 30^\circ$

ดังนั้น $\quad \tan 30^\circ = \dfrac{PR}{BR}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{BR}$$

$$\therefore BR = \sqrt{3}$$

จาก $\quad BC = BR + RS + SC$

จะได้ $\quad BC = \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$

$\therefore$ Δ ABC มีเส้นรอบรูปยาว $3(4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$ หน่วย

55. เฉลย 4) 5

จากโจทย์

$$\begin{aligned}
2 &= \sec^4 A - \tan^4 A \\
&= (\sec^2 A - \tan^2 A)(\sec^2 A + \tan^2 A) \\
&= \sec^2 A + \tan^2 A \quad (\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1) \\
&= (1 + \tan^2 A) + \tan^2 A = 1 + 2\tan^2 A \\
\tan^2 A &= \frac{1}{2} \\
\therefore \cot^2 A &= 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\operatorname{cosec}^4 A - \cot^4 A &= (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)(\operatorname{cosec}^2 A + \cot^2 A) \\
&= \operatorname{cosec}^2 A + \cot^2 A \quad (\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1) \\
&= (1 + \cot^2 A) + \cot^2 A \\
&= 1 + 2\cot^2 A \\
&= 1 + 2(2) = 5
\end{aligned}$$

56. เฉลย 2) $\frac{58}{89}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
4\sin^2\theta - 2(\sqrt{3} + 1)\sin\theta + \sqrt{3} &> 0 \\
(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}) &> 0 \\
\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &> 0
\end{aligned}$$

		30°		60°	
$\sin\theta - \frac{1}{2}$	–	0	+		+
$\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}$	–		–	0	+
$\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	+	0	–	0	+

$\therefore \theta < 30^\circ$ หรือ $\theta > 60^\circ$

ดังนั้น θ ที่สอดคล้อง คือ $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, ..., 28^\circ, 29^\circ, 61^\circ, 62^\circ, ..., 88^\circ, 89^\circ$ มีทั้งหมด 58 ตัว

$\therefore$ ความน่าจะเป็น คือ $\frac{58}{89}$

บัณฑิตแนะแนว

57. เฉลย 2) $\frac{15}{16}$

จำนวนผลลัพธ์จากการทอดลูกเต๋า 4 ลูกพร้อมกันมีทั้งหมด $6 \times 6 \times 6 \times 6$ วิธี
จำนวนผลลัพธ์ที่ผลคูณของแต้มหารด้วย 2 **ไม่ลงตัว**มีทั้งหมด $3 \times 3 \times 3 \times 3$ วิธี
(ลูกเต๋าหงายแต้มคี่ คือ 1, 3 หรือ 5 ทั้ง 4 ลูก)
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มหารด้วย 2 **ไม่ลงตัว** เท่ากับ

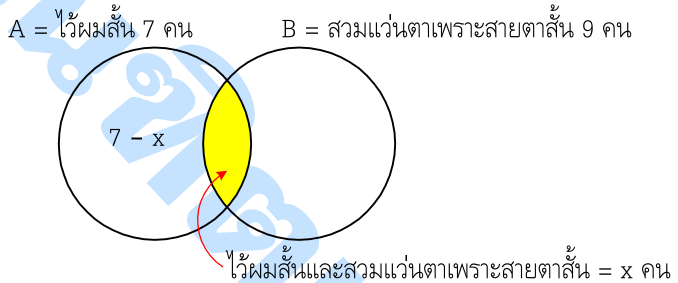
$$\frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{16}$$

จะได้ ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มหารด้วย 2 ลงตัว เท่ากับ

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

58. เฉลย 3) $\frac{1}{4}$

จากโจทย์ เขียนแผนภาพได้ดังรูป



ไว้ผมสั้นหรือสวมแว่นตาเพราะสายตาสั้นมี 12 คน
จะได้ $(7 - x) + 9 = 12$ นั่นคือ $x = 4$
$\therefore$ ไว้ผมสั้นแต่**ไม่**สวมแว่นตาเพราะสายตาสั้นมี $7 - 4 = 3$ คน
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สนใจ $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

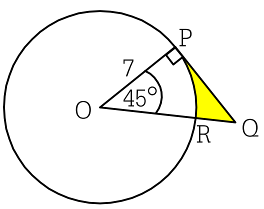
59. เฉลย 2) 5.25 ตารางหน่วย

$\because$ $\overline{PQ}$ สัมผัสกับวงกลมที่จุด P
$\therefore$ $\overline{OP} \perp \overline{PQ}$

จาก Δ POQ จะได้ $\tan 45^\circ = \frac{PQ}{OP}$

$$1 = \frac{PQ}{7}$$

$$\therefore PQ = 7$$

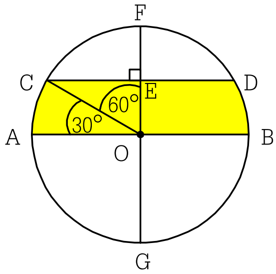


$\therefore$ พื้นที่แรเงา = พื้นที่ Δ POQ – พื้นที่เซกเตอร์ POR

$$\approx \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 - \frac{45}{360} \cdot \frac{22}{7} \cdot 7^2$$

$$\approx 5.25 \text{ ตารางหน่วย}$$

60. เฉลย 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตารางหน่วย



ลาก $\overline{OC}$ จะได้ OC = 1 หน่วย และ OE = $\frac{1}{2}$OF = 0.5 หน่วย

Δ COE ; $\cos E\hat{O}C = \frac{OE}{OC} = \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2}$

$\therefore E\hat{O}C = 60^\circ$

ดังนั้น $C\hat{O}A = 30^\circ$

Δ COE ; $CE = OC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ อาณาบริเวณที่แรเงา = 2 × (พื้นที่ Δ ฐานโค้ง COA + พื้นที่ Δ COE)

$$= 2 \times \left(\frac{30}{360}\pi(1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.5\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$ ตารางหน่วย

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

บัณฑิตแนะแนว